$A \subset \mathbb{R}^2$

$\mathring{A}$ = INSIEME DEI PUNTI INTERNI DI A

$\partial A = Fr(A)$ = INSIEME DEI PUNTI DI FRONTIERA DI A

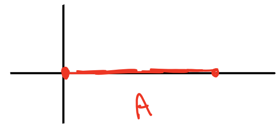
$\bar{A}$ = CHIUSURA DI A = $A \cup Fr(A)$

A È APERTO SE $A = \mathring{A}$ → NO PUNTI DI FRONTIERA

A È CHIUSO SE $\mathbb{R}^2 \setminus A$ È APERTO

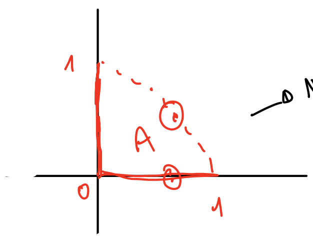
A È APERTO $\Leftrightarrow$ $A \cap Fr(A) = \emptyset$

A È CHIUSO $\Leftrightarrow$ $Fr(A) \subseteq A$



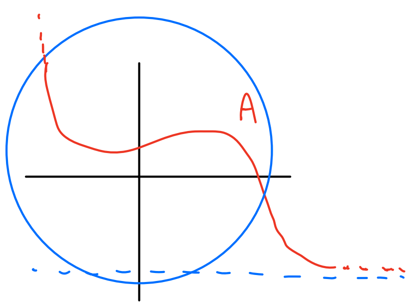
→ CHIUSO

$\mathring{A} = \emptyset$ NO PUNTI INTERNI

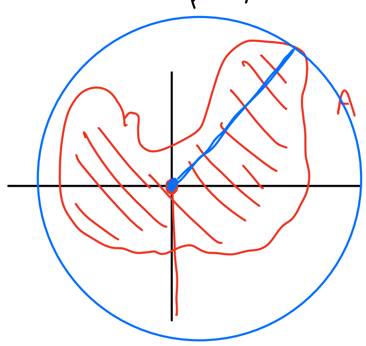


→ NO APERTO, NO CHIUSO

A SI DICE LIMITATO SE ESISTE $r > 0$: $U_r(0,0) \supseteq A$



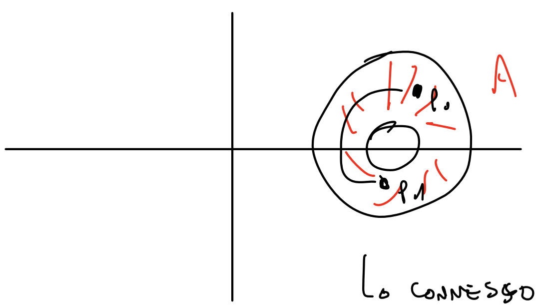
NON LIMITATO



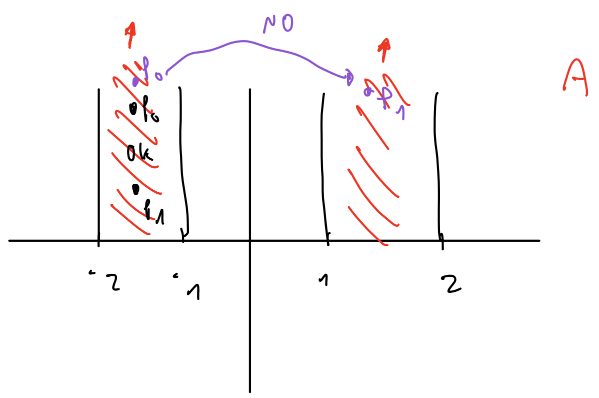
LIMITATO

A SI DICE CONNESSO PER ARCHI SE $\forall p_0, p_1 \in A$, $\exists \gamma$ CURVA CONTINUA PARAMETRIZZATA DA UNA f : $\bar{v}(t)$, $t \in [a,b]$, TALE CHE $\bar{v}(a) = p_0$

$\bar{v}(b) = p_1$ E $\bar{v}(t) \in A$ $\forall t \in [a,b]$



→ CONNESSO PER ARCHI



NON CONNESSO PER ARCHI

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

$\bar{x}_0$ È PUNTO DI ACCUMULAZIONE DI A SE $\forall U_r(\bar{x}_0)$: $U_r(\bar{x}_0) \cap A \setminus \{\bar{x}_0\} \neq \emptyset$

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(x) = l \qquad f(\bar{x}) \xrightarrow{\bar{x}\to\bar{x}_0} l$$

• PRESO UN QUALUNQUE INTORNO V DI l

$$\forall V \in I(l) \ \exists\ U_\delta(\bar{x}_0) : \forall \bar{x} \in U_\delta(\bar{x}_0) \setminus \{\bar{x}_0\} \Rightarrow f(\bar{x}) \in V$$

1) $L \in \mathbb{R}$ $\qquad L-\varepsilon \quad L \quad L+\varepsilon$ $\qquad \varepsilon$ PICCOLO QUANTO VOGLIAMO

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ \delta > 0 : \forall \bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$$

$$\bar{x} \neq \bar{x}_0 \Rightarrow |f(\bar{x}) - L| \leq \varepsilon$$

2) $L = \pm\infty$

$+\infty$ $\qquad$ M GRANDE QUANTO VOGLIAMO

M

$$\forall M > 0 \ \exists\ \delta > 0 : \forall \bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$$

$$\bar{x} \neq \bar{x}_0 \Rightarrow f(\bar{x}) \geq M$$

UNICITÁ DEL LIMITE

SE $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = L$ $\qquad L$ È UNICO

PERMANENZA DEL SEGNO

SE $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = L$, $L > 0$

ALLORA $\exists\ U_\delta(\bar{x}_0) : f(\bar{x}) > 0 \quad \forall \bar{x} \in U_\delta(\bar{x}_0) \setminus \{\bar{x}_0\}$

$f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

f è CONTINUA IN $\bar{x}_0 \in A$ SE $\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$

$\to$ f È CONTINUA $\Leftrightarrow$ LO È IN TUTTI I PUNTI DEL SUO DOMINIO

• PROPRIETÁ $f, g : A \to \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ f, g SONO CONTINUE

ALLORA: $f+g$ CONT. $\quad f \cdot g$ È CONT. $\quad f/g \overset{g\neq 0}{\text{È}}$ CONT. $\quad g(f(\bar{x}))$ È CONT.

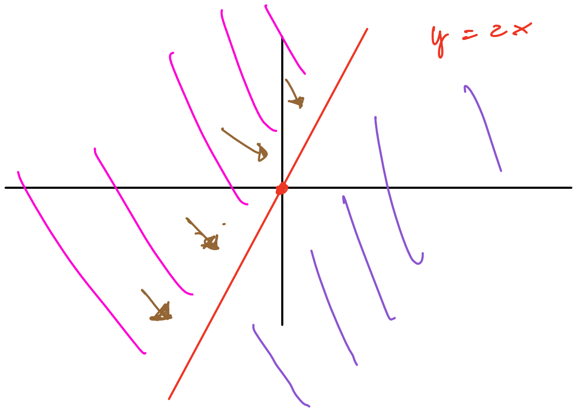
ESEMPIO

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 + y^2 - 1, & y > 2x \\ -2x - y, & y \leq 2x \end{cases}$$

f È CONTINUA?

DISEGNO DOMINIO



COSA SUCCEDE IN 2x

$$f(x, 2x) = -2x - 2x = -4x$$

$y = 2x$

- $\lim\limits_{y \to 2x} f(x,y) = \lim\limits_{y \to 2x} x^2 + y^2 - 1 = x^2 + (2x^2) - 1 = x^2 + 4x^2 - 1 \to 5x^2 - 1$

$y > 2x$

f È CONTINUA SE IN QUALCHE PUNTO DELLA RETTA SE $5x^2 - 1 = -4x$

$$5x^2 + 4x - 1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{10} \quad \begin{cases} -1 \ \checkmark \\ 1/5 \ \checkmark \end{cases}$$

P_0 $(-1, -2)$ $\quad$ P_1 $(1/5, 2/5)$

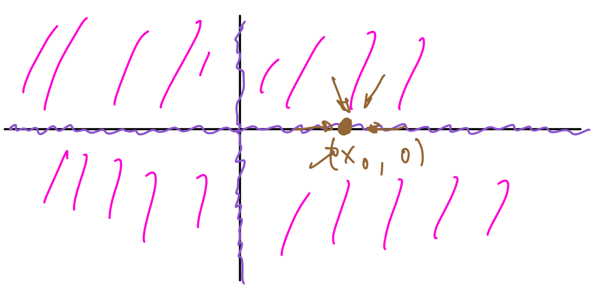
PUNTI IN CUI f È CONTINUA

ESEMPIO

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 - 1)(x^2 + y^2 - 2), & x \cdot y \neq 0 \\ 0, & x \cdot y = 0 \end{cases}$$

↳ ASSE x O ASSE y



f È CONTINUA IN $(x_0, 0) \to \lim\limits_{(x,y) \to (x_0, 0)} f(x,y) = f(x_0, 0) = 0$

QUANDO $(x, y) \to (x_0, 0)$ FUORI DAGLI ASSI

$$f(x,y) = (x^2+y^2-1)(x^2+y^2-2) \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,0)} 0$$

$$= ((x_0)^2-1)((x_0)^2-2) = 0$$

$x_0^2 = 1 \lor x_0^2 = 2$

$x_0 = \pm 1$ $\quad$ $x_0 = \pm\sqrt{2}$ $\to$ PER QUESTI VAL LA FUNZ. È CONTINUA

NEGLI ALTRI PUNTI È DISCONTINUA

f È CONT. IN $(0, y_0)$? STESSO PROCEDIMENTO DI $(x_0, 0)$

- CONTINUITÀ E CALCOLO LIMITI IN $\mathbb{R}^2$

ESEMPIO

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x^2+y^2)}{1+e^{-x-3y}} = \frac{\arctan(0)}{1+e^0} = \frac{0}{2} = 0$$

ESEMPIO

NUM. TORE VA A ZERO PIÙ VELOCEMENTE!

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \to \frac{0}{0} \quad \text{F.I.}$$

$f(0,y)$

MI AVVICINO ALL'ORIGINE LUNGO L'ASSE y

$$= \frac{3y^3}{5y^2} = \frac{3}{5}y \xrightarrow{y\to 0} 0$$

$f(x,0) = 0$

MI AVVICINO LUNGO LA BISETTRICE $y = x$

ALLORA $f(x,x) = \dfrac{x(x^2+3x^2)}{x^2+5x^2} = \dfrac{x^3+3x^3}{} = \dfrac{4x^3}{6x^2} = \dfrac{4}{6}x = 0$

• $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} = 0$

$$\left| \frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5y^2} \right| \leq \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

$$|f(x,y)| \leq g(x) \; (g(y)) \qquad \begin{matrix} g(x) \xrightarrow{x\to 0} 0 \\ (g(y)) \xrightarrow{y\to 0} 0 \end{matrix}$$

$$\left| \frac{y(x^2+3y^2)}{x^2+5x^2} \right| \overset{=}{\leq} |y| \frac{x^2+3y^2}{x^2+5y^2} \leq$$

$\frac{x^2+3y^2}{x^2+5y^2} \leq 1$ PERCHÉ DENOM SEMPRE > NUM. SEMPRE VERO $\forall x, y \in \mathbb{R}^2$

$$|y| \frac{x^2+3y^2}{x^2+5y^2} \leq |y| = g(y) \xrightarrow{y\to 0} 0$$